第八章　古希腊数学文化史

§8.1 概述

一、希腊数学文化的奠基与发展

从地理范围上讲，古希腊的领土除了现在的希腊半岛外，还包括整个爱琴海区域和北面的马其顿和色雷斯、意大利半岛和小亚细亚(今土耳其)及非洲北部等地。希腊文明大致可以追溯到公元前 2800 年。到了公元前 5、6 世纪，特别是希、波战争以后，雅典取得希腊城邦的领导地位，经济生活高度繁荣，生产力显著提高，在这个基础上产生了光辉灿烂的希腊文化，这是人类历史上最宏伟的文明之一，它对现代西方文化的发展产生了重大而深远的影响。

“希腊数学”是一个习惯用语，从时间上分析，自公元前 600 年左右开始，到公元 641 年为止共持续了近 1300 年。现在的数学史书，一般都将这一时期在这个地理范围内所发展起来的数学，统称为“希腊数学”。

希腊数学的发展历史可以分为三个时期：

第一个时期：从爱奥尼亚学派到柏拉图学派为止，始于公元前 600 年，终于公元前 336 年希腊被并入马其顿帝国，活动范围主要集中在雅典附近，又称为古典时期。此期又可以希波战争为界划分为前后两个发展阶段，希波战争以前的希腊数学成就，以爱奥尼亚学派和毕达哥拉斯学派为代表。希波战争以后，以巧辩学派、埃利亚学派、原子论学派和柏拉图学派的成就为代表。特别是从公元前 480 年到公元前 336 年，数学史上又称为雅典时期，在这个时期，由于实行民主政体，哲学与数学空前繁荣，产生了象亚里士多德这样一位百科全书式的人物，他对数学发展的一个重大贡献是他在《分析篇》中创立了演绎证明的逻辑（三段论）和演绎科学的方法论（公理方法）。

公元前 4 世纪以后的希腊数学，逐渐脱离哲学和天文学，成为独立的学科。数学的历史于是进入一个新阶段——初等数学时期。 这个时期的主要特点是：数学(主要是几何学)已建立起自己的理论体系，即由少数几个原始命题(公理)出发，通过逻辑推理得到一系列的定理，标志着数学已从以实验和观察为依据的经验科学过渡到演绎的科学。 在这一时期里，初等几何、算术初等代数大体已成为独立的科目。与 17 世纪出现的解析几何学、微积分学相比，这一个时期的研究内容可以用“初等数学”来概括，因此叫做初等数学时期。

第二个时期：自公元前 336 年到公元前 30 年亚历山大里亚并入罗马帝国的版图为止，又称为亚历山大里亚前期。这个时期，科学文化的中心从雅典转移到埃及的亚历山大里亚。亚历山大里亚城，是东西海陆交通的枢纽，又经过托勒密王的加意经营，逐渐成为新的希腊文化中心，希腊本土这时已经退居次要地位。几何学最初萌芽于埃及，以后移植于

爱奥尼亚，其次繁盛于意大利和雅典，最后又回到发源地。经过这一番培植，已达到丰茂成林的境地。这时期以欧几里得、阿基米德、埃拉托塞尼、阿波罗尼奥斯和希帕索斯的数学成就为代表。

从公元前 3 世纪到公元前 146 年最后的一个希腊城市科林思陷落，古希腊灭亡，罗马成为地中海区域的统治者为止，希腊数学以亚历山大里亚为中心，达到它的全盛时期，数学史上又称为希腊化的科学时代。这里有巨大的图书馆和浓厚的学术空气，各地学者云集在此进行教学和研究。其中以亚历山大里亚前期三大数学家欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯的研究为代表，他们成为希腊数学史上影响最大的数学家。正是由于他们的工作，才使系统的、严格演绎的数学理论从此真正建立起来，从而开始了数学相对独立的发展。除了三大数学家以外，埃拉托塞尼的大地测量和以他为名的“素数筛子”也很出名。天文学家希帕索斯制作“弦表”，是三角学的先导。

第三个时期自公元前 30 年到 641 年亚历山大里亚被阿拉伯人占领。这是罗马人统治下的时期，希腊数学开始衰落。希腊数学走向衰除的原因出除了罗马人片面强调实用之外，最主要的原因是政治制度方面。幸好希腊的文化传统未被破坏，学者还可继续研究，然而已没有前期那种磅礴的气势，史称亚历山大里亚后期。这时期出色的数学家有晚期的希腊学者在算术和代数方面也颇有建树，以海伦(Heron)、托勒密(Plolemy)、丢番图(Diophantus)和帕波斯(Pappus)、梅涅劳斯、尼科马霍斯、普罗克洛斯取得的成就为代表。天文学家托勒密将希帕霍斯的工作加以整理发挥，奠定了三角学的基础。尼科马霍斯(约公元 100)著有《算术入门》，丢番图(约 250)的《算术》是讲数的理论的，而大部分内容可以归入代数的范围。它完全脱离了几何的形式，在希腊数学中独树一帜，对后世影响之大，仅次于《几何原本》。帕波斯的工作是前期学者研究成果的总结和补充。

公元 325 年，罗马帝国的君士坦丁大帝开始利用宗教作为统治的工具，把一切学术都置于基督教神学的控制之下。公元 330 年，首都从罗马迁到拜占庭，并改名为君士坦丁堡。公元 392 年，罗马帝王宣布基督教为国教，禁止信奉异教。并下令销毁希腊神庙和里面的大量藏书。公元 395 年，罗马帝国分成东西两部分，希腊成为东罗马帝国的一部分。亚历山大里亚的学校，随着古代社会的瓦解，逐渐衰落。公元 415 年，女数学家，新柏拉图学派的领袖海帕西娅(Hypatia，约 370---415 年)遭到基督徒的野蛮杀害。她的死标志着希腊文明的衰弱。

公元 529 年，东罗马帝国皇帝查士·丁尼(Justinian，527-565 年在位)下令关闭雅典的柏拉图学园以及其他学校，严禁传授数学，因而数学研究受到沉重的打击，许多希腊学者逃到叙利亚和波斯等地，他们带走了一些希腊书稿，使得古希腊文明得以保存并传至阿拉伯，后来再传回欧洲。

公元 641 年，亚历山大里亚被阿拉伯人占领，图书馆再次被焚，希腊数学悠久灿烂的历史，至此终结。

二、古希腊数学的特点和重要影响

1、古希腊的数学观、哲学观

（1）希腊人认为：在数学中可以看到关于宇宙结构和设计的最终真理。因此，古希腊人一开始就把数学与自然界紧密联系起来，并认为宇宙是按数学规律设计的，并且能被人们所认识，这为数学乃至科学的发展起了至关重要的作用。

（2）古希腊人的哲学思想，以严谨的逻辑性著称，他们善于通过精细的思考和严密的推理去认识世界。在数学研究上也具有这种特色。数学区别于其他学科最明显的特点是体系的严谨性，这实际上是从希腊数学才开始具备。欧几里得《原本》就是世界历史上第一个公理化方法建立起来的的逻辑演绎体系的代表作。

（3）希腊数学重演绎的思考和推理证明，演绎的思考首先出现在几何学中，而不是在代数学中，使几何具有更加重要的地位。因此，这就造就了古希腊几何学的辉煌，成为人类宝贵的精神财富。这种状态一直保持到笛卡儿解析几何的诞生。

（4）古希腊人追求一种理智的训练。古代中国、埃及、巴比伦、印度等国虽然积累了大量的数学知识，但并没有把零散的数学知识系统化，使之成为一门独立学科，而只是做为一种工具。因此，这些数学一直停留在实验科学，即算术的阶段。他们只能回答“应该怎么做”，却无法回答“为什么要这样做”。希腊则走上了完全不同的道路。古希腊人在探究前人数学的时候，有意识地解决了“为什么要这样做”的问题，将人类早期的“经验数学”逐步转化为“理论数学”，并形成了欧几里得的《原本》与亚里士多得的逻辑体系，成为现代科学的始祖。

2、古希腊数学的精神

古希腊不仅是几何学的发源地，而且也是科学家精神和西方文明的发源地。希腊数学产生的数学精神包括：

（1）是对自然界依数学规律设计的信念。希腊人认为在数学中可以看到关于宇宙结构和设计的最终真理，而且是能被人们所认识的，这为数学乃至科学的发展起了至关重要的作用。希腊数学家不仅使真正意义的数学科学的诞生，而且把数学的作用和地位大大增强了。在他们眼里，研究自然的领域都有数学，数学不仅是应用于一些实际问题的工具。更为重要的是，数学是理解宇宙的一把钥匙，是自然知识的一个组成部分。

（2）希腊人崇尚理性，善于从理论上解决问题，将哲学作为数学的基础，把数学抽象化和理论化。许多希腊数学家同时就是哲学家、天文学家或力学家，这对西方数学的发展具有不可估量的意义和价值。而由这一精神所产生的理性、确定性、永恒的不可抗拒的规律性等一系列思想，则在人类文化发展史上占据了重要的地位。

（3）是推崇数学推理与证明的逻辑方法；强调演绎推理和逻辑证明是确立数学命题的真理性的一个基本方法，并将这种方法推广到一切科学的领域。他们认识到只有用勿容置疑的演绎推理法才能获得真理，而不能把靠不住的事实当作已知。希腊数学的这种传统和风格造就了人类几何学方面的辉煌成就，欧几里得几何学是希腊人在数学方面最杰出的贡献。他们所留下的丰富学术遗产，不仅仅是初等数学内容，还包含了许多近现代数学思想的线索。

（4）是对数学美的追求。希腊人重视数学在美学上的意义，认为数学是一种美，是和谐、简单、明确以及有秩序的艺术；随着几何学美妙结构和精确推理的发展，数学变成了一门艺术。

3、希腊数学文化的理性精神对后世的影响

希腊数学文化对人类的贡献不仅仅在于产生了一些有用的、美妙的定理，更重要的是它孕育了一种理性精神。而由这一精神所产生的确定性、永恒的不可抗拒的规律性等一系列思想，则在人类文化发展史上占据了重要的地位。

（1）由于数学文化的发展，使得希腊社会具有现代社会的一切胚胎。

人们把希腊数学文化的理性精神不仅运用于数学本身的研究，还运用于其它领域。神学家、逻辑学家、哲学家、政治家、和所有真理的追求者都纷纷仿效欧几里德的模式，来建立他们自己的理论。令人惊奇的是，欧几里得的模式还推广到了政治学。美国的《独立宣言》是一个著名的例子。《独立宣言》是为了证明反抗大英帝国的完全合理性而撰写的。美国第三任总统杰斐逊(1743－1826)是这个宣言的主要起草人。他试图借助欧几里得的模型使人们对宣言的公正性和合理性深信不疑。 “我们认为这些真理是不证自明的……”，“不仅所有的直角都相等，而且所有的人生来都平等”。……这些自明的真理包括，如果任何一届政府不服从这些先决条件，那么“人民就有权更换或废除它”。接着，在《独立宣言》主要部分的开头讲，英国国王乔治的政府没有满足上述条件…… 。“因此，我们宣布，这些联合起来的殖民地是（而且按正当权力应该是）自由的和独立的国家。”

（2）希腊数学文化的理性精神不仅为今后的数学的发展奠定了良好的基础，古希腊的数学教育在古代数学教育中也是独树一帜。其特点一是贵族化教育；二是强调数学作为智力、思维能力的训练。由于古希腊人推崇追求一种思想、理智的训练，他们把实用目的仅仅作为数学教育的一个微不足道的方面，而注重于逻辑推理能力、抽象思维能力的培养。现代学校中的初等数学知识内容、问题和范围，基本上是在希腊数学的基础上发展起来的，其中特别是初等几何。欧几里得《原本》两千余年来一直被公认为初等数学的基本教材，它的演绎形式和公理化方法被推崇为数学科学教育的典范和样板，其影响一直延续至今。

三、古希腊数学的局限性

任何民族的文化都有它的优点，也有它自身的不足之处。他们一方面为人类作出自己贡献的同时，也给后代人留下了一些有待解决的问题或者遗憾。作为世界文化优秀遗产的古希腊数学同样是如此。

1、尽管古希腊人尽管完成了把数学变成科学、变成严格的演绎理念这个重大的历史任务，但另一个方面，在数学的两上基本概念之一的数的概念面前突然止步了，他们不能认识无理数，更没有深入探讨无理数的本质，也未能克服因无理数产生造成的困难和矛盾，

从而导致了第一次数学危机。古希腊的几何学是理论的、演绎的，而它的算术则主要是经验的、计算的。由于算术和代数进展缓慢，使几何、算术、代数的联系被割断，长期造成数学中形与数之间的分裂，整体性不足。这种不平衡的发展，影响了数学的进步，这种状况直到解析几何和微积分的创立，才得到克服。

2、希腊人把结构严密的数学（除数论外）仅限于几何，即使是古希腊最擅长的几何中，也只限于研究直线与圆的几何。囿于当时的认识水平，他们认为，数学的概念必须是逻辑上不自相矛盾的，这就要求数学概念在直观上是存在的，而为了证明这种存在性，他们就把几何局限于能够用直尺和圆规构造出来的那些图形，这在一定程度上限制了数学的进一步发展。

§8.2　古希腊的数学学派

古希腊数学教育是以几何学为中心，注重抽象思辨和公理化，数学教育的主要目的是培养学生的逻辑思维能力。古希腊的数学教育形式主要是形成以地域特色的古希腊的数学学派。

泰勒斯

一、爱奥尼亚学派

爱奥尼亚学派，是古希腊第一个数学学派，由“科学之父”的泰勒斯创立。爱奥尼亚包括小亚细亚(今属土耳其)西岸、中部和爱琴海中部诸岛。公元前1200年到公元前1000年间，希腊部落爱奥尼亚人迁移到此，因此而得名。爱奥尼亚学派研究的对象是包括哲学和自然科学的自然哲学体系，数学与天文学是自然哲学的不可分割的部分。真正的希腊科学是从这里开始的，因为在古希腊首先试图不依赖宗教信条来理解和阐释宇宙的结构的正是爱奥尼亚学派。

泰勒斯(Thales of Miletus，约前625-前547)是古希腊第一个数学家和哲学家，希腊最早的哲学学派——爱奥尼亚学派的创始人，被誉为希腊“科学之父”。在游历埃及时，泰勒斯曾利用太阳影子成功地计算出了金字塔的高度（实际上利用的就是相似三角形的性质），算出了金字塔的高度，使古埃及国王阿美西斯钦羡不已。当时天文、数学和哲学是不可分的，泰勒斯同时也研究天文和数学。他曾预测一次日食，多数学者认为该次日食发生在公元前585年5月28日。他在埃及时曾利用日影及比例关系算出金字塔的高，使法老大为惊讶。

泰勒斯在数学方面的划时代贡献主要有：（1）他把埃及的地面几何演变成平面几何学，发现了许多几何学的基本定理，如“直径平分圆周”、“等腰三角形底角相等”、

“两直线相交，其对顶角相等”、“半圆上的圆周角是直角”、“相似三角形对应边成比例”等，并将几何学知识应用到实践当中去。（2）开始了命题证明。例如，“如果两个三角形有一条边以及这条边上的两个角对应相等，那么这两个三角形全等”。这个定理也是泰勒斯最先发现并最先证明的，后人常称之为“泰勒斯定理”。相传泰勒斯证明这个定理后非常高兴，宰了一头公牛供奉神灵。后来，他还用这个定理算出了海上的船与陆地的距离。

如果说证明命题是希腊几何学的基本精神的话，那么，泰勒斯就是希腊几何学的先驱。泰勒斯开创的命题证明的思想，在数学史上具有重要意义，它标志着人们对客观事物的认识从经验上升到理论，为建立几何的演绎体系迈出了第一步。

二、毕达哥拉斯学派

毕达哥拉斯（公元前 572-公元前 497）出生在爱琴海中的萨摩斯岛(今希腊东部小岛)，与中国的孔子（公元前 551-前 479）同时，是科学史上最重要的人物之一，不仅影响柏拉图，而且还影响到文艺复兴时期的哲学家和科学家。他自幼聪明好学，曾在爱奥尼亚学派有影响的人物安纳西曼德门下学习，接受几何学、自然科学和哲学。以后因为向往东方的智慧，游历巴比伦和埃及等地，吸收了阿拉伯文明和印度文明甚至中国文明的丰富营养，后移居西西里岛，最后定居意大利南部的克罗托内，在那里一边从事教育，一边从事数学研究。约公元前 530 年，建立了一个宗教、政治、学术合一的团体，这就是毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯学派信奉“万物皆数”的哲学信条，即将抽象的数作为万物的本源，通过揭露数的奥秘来探索宇宙的永恒真理。他们将科学分为四大分支，即算术、几何、音乐、天文。该学派注意到数与音乐和谐之间的关系，因而创造了一套音乐理念。例如，他们发现如果两弦紧张的程度（张力）相同，长度为简单的整数比时，奏出来的就是和谐悦耳的音乐。该学派来研究了数与几何何图形的关系、数与天体运行的关系，在对数的研究中带有神秘色彩。毕达哥拉斯学派对在数学的发展作出了贡献，尤其是他们对整数的性质研究上有很多创造。例如，把(除其本身以外)全部因数之和等于本身的数称为完全数(如 6，28，496 等)，而将本身大于其因数之和的数称为盈数；将小于其因数之和的数称为亏数。他们还发现了亲和数（如 220 与 284 就是一对亲和数），是友谊的象征。两千年后的费马才发现了第二对亲和数，即 17296（$=2^4\cdot23\cdot47$）与 18416（$=2^4\cdot1151$）。现在已找到上千对亲和数。

毕达哥拉斯学派从形与数的关系出发，研究了二者的结合物——“形数”，如三角数、平方数、五角数、六角数，等等，并用点子排出。利用形数可以得出关于整数的一些重要的结论，例如，毕氏称 1，1+2，1+2+3，1+2+3+4，等等为三角数（Triangular numbers）。如

果求 S=1+2+3+ …+n 的值（这里用◎球表示其数目），就可以设想有另外一个 S（这里用○球表示其数目），将其倒放，并与原来的 S 拼合起来，就得到一个菱形，总共有 n 行，每一行有 n+1 个球，所以全部有 n(n+1)个球，因此一个 S 就是 n(n+1)/2，如图 1。

◎○○○○

◎◎○○○

◎◎◎○○

◎◎◎◎○

图 1

而对于 1，4，9，16，…，n^2 可以构成正方形点阵，它们也被称作正方形数或平方数。类似地，

五角数：1，5，12，22，35，

六角数：1，6，15，28，45，…

这说明毕达哥拉斯学派已经研究了这些数列，由此可以得出一些数列中的重要公式，而这一类数列现在已成为高阶等到差数列的范围。

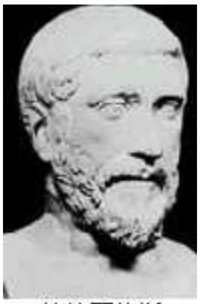
在几何学方面，毕达哥拉斯学派发现“勾股定理”，并且给出了某种证明，后来被欧几里得编入《几何原本》之中，这是他们最出色的成就之一，因此直到现在，西方人仍然把勾股定理称为“毕达哥拉斯定理”。正是这个定理，导致了无理数的发现。当今数学上又有“毕达哥拉斯三元数组”的概念，指的是可作为直角三角形三条边的三数组的集合，也就是不定方程

$$x^2+y^2=z^2$$

的解。毕达哥拉斯学派发现以 2n+1，$2n^2+2n$ 为直角边 ，以 $2n^2+2n+1$ 为斜边，就是其中的一组解。这一点可作如下解释：由 $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$。如果（2k+1）恰好是某一奇数的平方，不妨设 $2k+1=(2n+1)^2$，于是 $k=2n^2+2n$，这样等式左边为两个平方数之和，等式右边也为平方数。即有：

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2。$$

毕达哥拉斯学派还证明了“三角形内角之和等于两个直角”的论断；最先认识并研究了“黄金分割”；发现了正五角形和相似多边形的作法；证明了正多面体只有五种——正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体。其中，正四面体、正六面体、正八面体古埃及人已经知道，正十二面体和正二十面体是毕达哥拉斯学派的发现。此外，他们还发现了不可通约量的存在，大约是在公元前 470 年左右，那时的毕达哥拉斯已经去世。


毕达哥拉斯

晚年的毕达哥拉斯不仅学术上趋向保守，而且政治上反对新生事物。最后来在政治斗争中遭到破坏，毕达哥拉斯被杀害后，他的学派还继续存在两个世纪之久。阿尔·希塔斯（Archytas）是晚期这个学派的主要代表。他继承并系统地发展了毕达哥拉斯的学说，例如，他探讨了平均值及比例的理论，进一步发展了毕达哥拉斯的音乐理论，写了哲学与机械方面的著作。他曾用立体的方法解决倍立方的问题，为人称道。

毕达哥拉斯学派与爱奥尼亚学派有显著的不同：爱奥尼亚学派研习数学并不单纯为了哲学的兴趣，同时也为了实用。而毕达哥拉斯学派组织严密，学派成员有共同的哲学信仰和政治理想，训练极为严格，且带有浓厚的宗教色彩，他们将数学作为教义的组成部分，研究数学不在于实际应用价值，而在于宣扬上帝用数来统御宇宙。此外，毕达哥拉斯学派还有一个教规，就是一切发明都归功于学派的领袖，而且对外保密，因此早期的学派成员几乎没有留下名字。直到公元前 480 年，毕达哥拉斯遇害，组织遭到破坏，他们的研究成果才逐渐为外界所知。

三、埃利亚学派

这个时期的希腊数学研究与教育中心还有埃利亚学派。埃利亚位于意大利半岛西岸，创始人是巴门尼德（Parmenides,约公元前 515-约公元前 450），本学派的代表人物是数学史上著名的“诡辩家”芝诺(Zeno，约公元前 490-约前 430)，他首先提出了“悖论”这个概念，并叙述了四条著名的悖论（他共创设了 40 个悖论）：

1）二分说：一个物体从甲地到乙地，永远不能到达。因为想从甲到乙，首先要通过道路的一半，但要通过这一半，必须先通过一半的一半，这样分下去，永无止境。结论是此物的运动被道路的无限分割阻碍着，根本不能前进一步；2）阿基琉斯(善跑英雄)追龟说，阿基琉斯追乌龟，永远追不上。因为当追到乌龟的出发点时，龟已向前爬行了一段，他再追完这一段，龟又向前爬了一小段。这样永远重复下去，总也追不上；3）飞箭静止说，每一瞬间箭总在一个确定的位置上，因此它是不动的；4）运动场问题，芝诺论证了时间和它的一半相等。设有三队士兵 A，B，C，开始时首尾对齐，现 C 队不动，设在最小的时间单元内，A 队向左移一位，B 队向右移动一位，但相对于 B 而言，A 移动了两位。于是使 A 相对于 B 移动一位的时间应该是时间单元之半。假定时间单元不能再分，那么，时间和它的一半相等。芝诺提出的这四个著名的悖论以及他提出的其他发人深省的问题，迫使哲学家和数学家深入思考无穷的问题。

四、巧辩学派

巧辩学派，也译为“智人学派”或“哲人学派”。公元前5世纪，雅典成为人文荟萃的中心，人们崇尚公开的精神。在公开的讨论或辩论中，必须具有雄辩、修辞、哲学及数学等知识，于是“智人学派”应运而生。这个学派代表人物是普洛塔哥拉斯（Protagoras,公元前481-公元前411）、哥尔基亚（Gorgias,公元前487-公元前380）、安提丰（Antiphon,公元前480？-公元前411）等。他们主要是以教授文法、逻辑、数学、天文、修辞、雄辩等科目为业，培养各方面的人才。

1、“三大几何难题”

巧辩学派在数学上的研究中心是，著名的 “三大几何难题”。这些问题之所以及被称为难题，主要是要求作图只能用直尺（指只能划直线、没有刻度的尺）和圆规（简称尺规），而且只能有限次地使用直尺和圆规：

（1）三等分任意角。这是由求作多边形引起的。实际上是属于解三次方程问题，如果不限定尺规作图，是容易解决的。对于某些角如90^0，135^0，180^0，三等分并不难，而对于有些角如60^0，三等分就是20^0，如果说能尺规作图的话，那么正9边形、正18边形也都可以作出了。

（2）倍立方体。即求作一立方体，使其体积是已知立方体的二倍。关于倍立方体问题，有多种传说，例如一种传说是给国王的正立体的墓要扩大一倍，由此产生了倍立方体问题；另一种是埃拉托塞尼（公元前276年～公元前195年）曾经记述一个神话：在第罗斯岛上，瘟疫不断漫延，岛上的人求教于巫神，巫神告诉他们，应把现在的立方祭坛加倍，这就产生了倍立方的问题，也称为“第罗斯”问题，但我们都知道那是错误的，因为体积已经变成原来的8倍。倍立方体问题实际上同样是属于解三次方程问题，如果不限定尺规作图，是容易解决的。

（3）化圆为方。即求作一正方形，使其面积等于一已知圆。对于化圆为方问题，这个学派的安提丰提出用“穷竭法”去解决化圆为方问题，这是近代极限理论的雏形。所谓“穷竭法”有两个方面的意义：一是“穷举法”，即将所有可能的情形都一一考虑的一种证明方法；二是“穷竭法”，即是指某一个图形（如圆）被另一个图形（如内接正多边形）所逐步“穷竭”。安提丰先作圆内接正方形，以后每次边数加倍，得8、16、32、…边形。随着一个圆的内接正多边形的边数逐次成倍增加,安提丰深信“最后”的多边形与圆的面积之“差”必会“穷竭”。这提供了求圆面积的近似方法，和中国的刘徽的割圆术思想不谋而合。同样，化圆为方问题如果不限定尺规作图，也是容易解决的。欧洲文艺复兴时期的大师达·芬奇（L.Davinci,1452-1519）曾创立用圆柱来解决化圆为方问题的方法：取一圆柱，使底与已知圆相等，使矩形的面积等于$2\pi r\cdot\frac{r}{2}=\pi r^2$正好是圆的面积，再将矩形改为等积的正方形。

2、尺规作图所能作出的基本图形

尺规作图所能作出的基本图形有：(1)过两点画一条直线、作圆、作两条直线的交点、作两圆的交点、作一条直线与一个圆的交点；(2)二等分已知线段；（3）二等分已知角；（4）已知直线 l 和直线外一点 P，过点 P 作直线 l 的垂线；（5）所有正整数 n（长度为 n 的线段）；（6）所有正分数 $\frac{m}{n}(n \neq 0)$；（7）上述各种数的和、差、积、商及算术平方根。某个图形是可作的就是指从若干点出发，可以通过有限个上述基本图形复合得到，这一过程中隐含了近代代数学的思想。尺规作图的一条准则是：凡是由有理数经过有限多次+、−、×、÷、$\sqrt{\ }$ 等五种运算得出的数量（以线段长度表示这种数量），都可以用尺规作图法作出来。反过来，还可以进一步证明：用尺规能作出的数量，也仅限于上面所说的数量。

因此，用直尺和圆规的确可以作出许许多多相当复杂的图形，但有些图形如正 7 边形、正 9 边形都作不出来。后来高斯证明，对于奇数，当且仅当 n 是一个费马素数，或者若干个费马素数的乘积时，正 n 边形才可以用尺规作图作出，这就是著名的高斯定理。例如，3 是第一个费马素数，故可作出正三角形，尺规可平分任一角，通过平分 180^0 角，可以作出正四边形，进而可作出 2^n 边形，$3 \cdot 2^n$ 边形，5 是第二个费马素数，故可作出正五边形。正 9 边形不可尺规作图，是因为 9=3×3 是两个相等的费马素数乘积，而正 11、13 边形也不可尺规作图，因为它们都不是费马素数。高斯的一个重要贡献是给出并证明了正 17 边形的尺规作图方法。有些尺规作图问题看起来简单，实际上解决起来会很难，这就是尺规作图的魅力所在。希腊人的兴趣并不在于图形的实际作出，而是在尺规的限制下从理论上去解决这些问题，是几何学从实际应用向演绎体系靠拢的又一步。

三大问题吸引了无数能人志士，为之作出不懈的努力，但都未能如愿。但它往往使研究者闯入未知的领域中，作出新的发现：圆锥曲线就是最典型的例子，希腊的门奈赫莫斯(Menaechmus)，事实上他就是为了解决倍立方问题(相当于三次方程 $x^3=2a^3$)而发现圆锥曲线的;化圆为方问题亦导致了圆周率和穷竭法的探讨。直到 1637 年笛卡儿创建解析几何以后，许多几何问题都可以转化为代数问题来研究，使直规作图的可能性才有了准则。1837 年数学家旺泽尔首先给出了前两个问题尺规作图的不可能的证明。接着，1882 年数学家林德曼证明了 π 的超越性之后，也给出了最后第三个问题尺规作图的不可能的证明，从而彻底解决了此类几何作图“难题”。到了 1895 年，德国数学家克莱因（F.Kline）给出三大几何问题不可能用“初等几何作图法”来解答的简单而明晰的证明，从而彻底解决了 2000 多年的历史悬案。

五、柏拉图学派

继巧辩学派之后，领导希腊数学活动的当属柏拉图学派。公元前 3 世纪，哲学家柏拉图(Plato，公元前 427—前 347 或 348)在雅典创办著名的柏拉图学园，培养了一大批数学

家，成为早期毕氏学派和后来长期活跃的亚历山大里亚学派之间联系的纽带。柏拉图出身于雅典一个显贵的家族，自幼受到良好的教育，他勤奋好学，多才多艺。早年向大哲学家苏格拉底学习，受其思想影响很深。公元前 387 年，柏拉图在雅典近郊创办了一个讲学的场所，定名为学园。后来“学院”一词由此而来。这所学园一直存在到 529 年东罗马帝国皇帝查士·丁尼下令关闭希腊的学校，前后达 900 多年。该学派产生与发展时间之长、影响之大在历史上极为罕见。

柏拉图非常重视数学，尽管他本人没有作出非常突出的数学成果，但他十分强调数学的严谨性，在数学中，他坚持准确地定义数学概念，强调清晰地阐述逻辑证明，并首次提出应该把严格推理法则系统化，他还是第一个提出分析证明方法的人，为数学向更高阶段发展起了重要的先导作用。同时，柏拉图主张科学的任务是发现自然界的结构，而数学是一切学科的基础，因此，他特别强调数学的理性作用和价值，主张要脱离直观印象而强化纯理性的证明。

柏拉图片面强调数学在训练智力方面的作用，而忽视其实用价值。应该重视发展人的几何思维，他主张通过几何的学习培养逻辑思维能力，因为几何能给人以强烈的直观印象，将抽象的逻辑规律体现在具体的图形之中。

柏拉图学派培养出不少数学家，如欧多克索斯(Eudoxus)、门奈赫莫斯（Menaechmus）就曾就学于柏拉图。欧多克索斯成为该学园最著名的人物之一，他的最主要成果有：（1）用公理法创立了同时适用于可通约量及不可通约量的比例理论，他为此作出的工作成为欧几里得《几何原本》第 5 卷《比例论》大部分内容。（2）提出了“阿基米德公理”(此命题是阿基米德在他的数学名著《论球和圆柱》中提出的)：用现代分析学的说法是“对于任意两个正数 a,b，必存在自然数 n，使得 na>b.阿基米德将它归功于欧多克索斯，说明他已有明确的公理化思想，他用公理化思想证明了十分重要的数学命题，并对德谟克利特为代表的原子论与安提丰提出用“穷竭法”加以改造，使其有逻辑的依据。门奈赫莫斯最突出的数学成就是：（1）发现了圆锥曲线，他用垂直于母线的平面支截直角、钝角圆锥面，从而得到三种曲线，并作出了比较分析；（2）是用圆锥曲线解倍立体问题。柏拉图的学生亚里士多德(Aristotle)是形式主义的奠基者，也是古代的大哲学家，他的《工具论》是世界上第一部完备的逻辑学，他的逻辑思想为日后将几何学整理在严密的逻辑体系之中开辟了道路。

六、原子论学派

原子论学派的创始人是勒西普斯（Leucippus,）生于米利都，曾是芝诺的学生。后来以德谟克利特(Democritus,约公元前 460-约公元前 370)为代表。原子论的基本观点是认为原子是万物的本原，原子是不可分割的意思，该学派原子论应用到数学上，认为线段、面积和立体，是由许多不可再分的原子所构成。计算面积和体积，等于将这些原子集合起

来，其中有现代积分学的萌芽，相当于现代计算积分中要用的“微元法”。阿基米德认为，德谟克利特是世界上第一个得出圆锥或棱锥体的体积是等底等高的圆柱或棱柱体积的1/3 的人，但他没有证明，后来的欧多克索斯最早给出了证明。这种不甚严格的推理方法，对后世产生了重要影响，是古代数学家发现新结果的重要线索。

§8.3　古希腊数学名家

一、逻辑之父--------亚里士多德

西方形式逻辑研究最主要的、有系统理论建树的是亚里士多德（公元前 384－前 322），亚里士多德在总结前人研究成果的基础上，最早从形式结构来论述演绎推理，从而第一次全面、系统地研究了逻辑学的各种主要问题，由他开始了形式逻辑的古典阶段。因此，有人称亚里士多德为“逻辑之父”。

亚里士多德开创的形式逻辑的古典阶段，包括几种常见的演绎推理和最简单的量词理论，也使用一些特有符号，但没有探讨关系逻辑和公理系统的逻辑性质。他的主要逻辑著作有：《范畴篇》、《解释篇》、《前分析篇》、《后分析篇》、《论辩篇》和《辩谬篇》。后人把它们收集在一起，合称为《工具论》。这是一部划时代的著作，其中《范畴篇》主要研究了概念和范畴的问题，《解释篇》主要研究了判断及其有关的问题，《前分析篇》和《后分析篇》主要研究了推理和证明的问题，《论辩篇》和《辩谬篇》主要研究了辩论的方法以及如何驳斥诡辩的问题、在这六篇中，《前分析篇》和《后分析篇》是最重要的部分，亚里士多德关于三段论的学说，关于证明的学说，就是在这里阐述的。此外，亚里士多德在其重要的哲学著作《形而上学》中，还集中地论述了形式逻辑的基本规律，即矛盾律、排中律以及同一律。需要指出的是，亚里士多德虽然在个别地方曾提到过归纳法，但他并未给它以应有的地位，他的主要精力是用在演绎法上面，因而他的主要贡献也正在于此。

二、“数学之神”——阿基米德

阿基米德（Archimedes，前 287~212 年），出生于意大利半岛南端西西里岛的叙拉古。父亲是位数学家兼天文学家。阿基米德从小有良好的家庭教养，１１岁就被送到当时希腊文化中心的亚历山大里亚城去学习。在这座号称“智慧之都”的名城里，阿基米德博览群书，汲取了许多的知识，并跟随欧几里得的门徒学习，在那里结识许多同行好友，如科农（Conon of Samos）、多西修斯（Dositheus）、埃拉托塞尼等等。回到叙拉古以后仍然和他们保持密切的联系，因此阿基米德也算是亚历山大里亚学派的成员，他的许多学术成果就是通过和亚历山大里亚的学者通信往来保存下来的。

阿基米德是历史上兼数学家与力学家的伟大学者，享有“力学之父”的美称，他通过大量实验发现了杠杆原理，又用几何演泽方法推出许多杠杆命题，给出严格的证明。其中就有著名的“阿基米德原理”，据说他确立了力学的杠杆定理之后，曾发出豪言壮语：“给我一个立足点，我就可以移动这个地球”！

在数学上，阿基米德有着极为光辉灿烂的成就，被誉为“数学之神” 。后人对阿基米德给以极高的评价，他与牛顿、欧拉和高斯并称为四个最伟大的数学家之一。

阿基米德对数学的最大贡献，是对曲边形与曲面体的研究，其中蕴含着丰富的积分学的思想。他的著作共有十来部流传至今，多数是几何著作，也有数学与力学结合的著作，表现出巨大的创造性、计算技能和证明的严谨性。 现存的阿基米德着作中，有三本是讲平面几何的，它们是：

（1）《圆的量度》：只有 3 个命题。主要是关于圆内接与外切 96 边形的周长的推算，证

明了圆面积等于以圆周长为底、半径为高的正三角形的面积。他在这里开创了计算圆周率 π 的古典方法，并求得圆周率 π 为： $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$，这是数学史上最早的记载。

（2）《抛物线的求积》：包括 24 个命题，研究了曲线图形求积的问题，并用穷竭法确定抛物线与任一弦所围弓形的面积。他证明了："任何由直线和直角圆锥体的截面所包围的弓形（即抛物线），其面积都是其同底同高的三角形面积的三分之四。"这一三角形底边所对之顶点就是抛物线上平行于底边的切线之切点。他还用力学权重方法再次验证这个结论，使数学与力学成功地结合起来。此外，还有收敛的几何级数的求积法。

（3）《论螺线》：共 28 个命题，讲的是现在称之为 "阿基米德螺线" 的一种曲线（极坐标方程为 $r = a\theta$）的性质，求出了螺线和它的两个向量径所围成的面积，并提出了计算切线长的方法。此外，阿基米德还导出几何级数和算术级数求和的几何方法。本书是阿基米德对数学作出杰出贡献的代表。

现存的阿基米德着作中，有两部是讲立体几何的，即：

（1）《论球和圆柱》：从 6 个定义和 5 个公理出发，推出关于球和圆柱面积与体积的 53 个命题，其中包括了许多重大的成就，比如，他熟练地运用穷竭法证明了球的表面积等于球大圆面积的 4 倍；球的体积是一个圆锥体积的 4 倍，这个圆锥的底等于球的大圆，高等于球的半径。阿基米德还指出，如果等边圆柱中有一个内切球，则圆柱的全面积和它的体积，分别为球表面积和体积的 3/2 在这部著作中，他还提出了著名的"阿基米德公理"等等。 下卷命题 4 有这样的问题：用一个平面截一球体，使其所成两个球缺体积之比为给定的比。这实质是引出了一个三次方程，他研究了三次方程 $x^2(a-x)=b^2c$ 解，还讨论了三次方程有正实根的条件。在欧洲数学界，在此后的一千余年中没有作过类似的讨论。

（2）《论劈锥曲面体和球体》，共 32 个命题，研究几种圆锥曲线的旋转二次曲面体，以及这些立体被平面截取部份的体积。开篇的两个引理分别是等差数学列求和公式和 $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

此外，重要的还有：

《数沙术》是现存的唯一一篇算术的论文，设计一种可以表示任何大数目的方法。他应用一个表示大数的算术体系找充满以地球为球心，以到太阳的距离为半径的球体的沙粒数的上限。尚存关于应用数学的有《论平板的平衡》（共两卷，25 个命题）和《论浮体》（共两卷，19 个命题）。他还设计了一个 "群牛问题"，导致二次不定方程 $x^2-4729494y^2=1$。此外，他还发现 13 种半正多面体，用边表示三角形面积的 "海伦公式" 和七边形的作图法。现已公认海伦公式是阿基米德发现的，但这个名称已成为习惯用法。

《砂粒计算》，是专讲计算方法和计算理论的一本著作。阿基米德要计算充满宇宙大球体内的砂粒数量，他运用了很奇特的想象，建立了新的量级计数法，确定了新单位，提出了表示任何大数量的模式，这与对数运算是密切相关的。

《平面的平衡》，是关于力学的最早的科学论著，讲的是确定平面图形和立体图形的重心问题。

《论浮体》，是古代第一部流体静力学着作，是第一次将数学用于流体静力学。阿基米德把数学推理成功地运用于分析浮体的平衡上，并用数学公式表示浮体平衡的规律。因此，他被尊为流体静力学的创始人。

《论锥型体与球型体》，讲的是确定由抛物线和双曲线其轴旋转而成的锥型体体积，以及椭圆绕其长轴和短轴旋转而成的球型体的体积。

在数学史上，有一个惊人的发现是，丹麦数学史家海伯格（Heiberg）于 1906 年发现了阿基米德的长期失传的标题为《方法谈》的论文。这篇著作是以给埃拉托塞尼的信的形式写的。它之所以重要，是因为它提供了阿基米德用来发现他的许多定理的一种“方法”。通过研究发现，这些方法蕴含着丰富的微积分的思想，他所缺的是没有极限概念，但其思想实质却伸展到 1 7 世纪趋于成熟的无穷小分析领域里去，预告了微积分的诞生。

公元前 212 年罗马军队攻入叙拉古，并闯入阿基米德的住宅，看见一位老人在地上埋头作几何图形，士兵将图踩坏。阿基米德怒斥士兵：“不要弄坏我的图！”士兵拔出短剑，刺死了这位旷世绝伦的大科学家，阿基米德竟死在愚蠢无知的罗马士兵手里。

三、欧几里得与《原本》

亚历山大里亚前期大数学家欧几里得把形式逻辑的公理演绎方法应用于几何学，从而完成了数学史上具有划时代意义的重要著作《原本》。

《原本》，共 13 卷。含有 23 条定义、5 条公理、5 条公设，在此基础上，演绎出 467 个命题，内容包括直线及圆的性质、比例论、相似形、数论、不可公度量的分类、立体几何及穷竭法等。《原本》成为古希腊数学的经典之作，把以实验和观察而建立起来的经验科学，过渡为演绎的科学，把逻辑证明系统地引入数学中，欧几里得在《原本》中所采用公理、定理都是经过细致斟酌、筛选而成，并按照严谨的科学体系进行内容的编排，使之系统化、理论化，超过他以前的所有著作。

《原本》第一卷开始就给出书中第一部分所用的概念的 23 个定义。如前面的 7 个定义是：（1）点是没有部分的那种东西；（2）线是没有宽度的长度。线这个字指曲线；（3）一线的两端是点；（4）直线是同其中各点看齐的线；（5）面是那种只有长度和宽度的东西；（6）面的边缘是线。（所以面也是有界的图形）；（7）圆是包含在一（曲）线里的那种平面图形，使从其内某一点到该线的所有直线都彼此相等。

接着，欧几里得列出五个公设和五个公理，他采用了亚里士多德对公设与公理的区别，即公理是适用于一切科学的真理，而公设则只适用于几何。

《原本》的五条公设是：

（1）从任一点到到任一点作直线[是可能的]；

（2）把有限直线不断延长[是可能的]；

（3）以任一点为中心和任一距离[为半径]作一圆[是可能的]；

（4）所有直角彼此相等；

（5）若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必交于该侧的一点。

五条公理是：

（1）与同一件东西相等的一些东西，它们彼此也是相等的；

（2）等量加等量，总量仍相等；

（3）等量减等量，余量仍相等；

（4）彼此重合的东西是相等的；

（5）整体大于部分。

《原本》的特点和历史地位：

（1）抽象化的内容

《原本》的内容是抽象的。这主要表现在：

1）《原本》中研究的对象都是抽象的概念和命题，它所探讨的是这些概念和命题之间的逻辑关系，不讨论这些概念和命题与社会生活之间的关系，也不考察这些数学模型所由之产生的现实原型。

2）《原本》撇开研究对象的具体内容，仅仅保留空间形式和数量关系，这些形式和关系是一种形式化的思想材料。

3）《原本》是以逻辑为链条的形式化符号系统，数学的形式化方法决定了数学能对纯粹的量进行独立地、理想化地、系统地、深入地研究，并且独立地创造出思想成果，推动数学自身的发展。

4）从抽象程度上，《原本》每一次抽象都是理性思维的结晶，体现了当时人类思维的最高层次。

（2）公理化方法

公理学研究的对象、性质和关系称为“论域”，这些对象、性质和关系，由初始概念表示．欧氏《原本》是实质公理学的典范。第一篇中开头 5 个公设和 5 个公理，是全书其它命题证明的基本前提，接着给出 23 个定义，然后再逐步引入 和证明定理。定理的引入是有序的，在一个定理的证明中，允许采用的论据只有公设和公理与前面已经证明过的定理。以后各篇除了不再给出公设和公理外也都照此办理。这种处理知识体系与表述方法就是公理化思想。《原本》中只需取“点”、“直线”、“平面”；“在……之上”、“在……之间”、“叠合”作为初始概念．前三个概念所表示的三类对象和后三个概念所表示的三种关系就是这种几何的论域．按照“一个公理系统只有一个论域”的观点建立起来的公理学，称为实质公理学．这种公理学是对经验知识的系统整理，公理一般具有自明性。

《原本》一书把亚里士多得初步总结出来的公理化思想应用于数学，整理、总结和发展了希腊古典时期的大量数学知识，在数学发展史上树立了一座不朽的丰碑。如果说亚里士多德创立的逻辑方法是公理化思想的萌芽，那么欧几里得《原本》的问世就标志着公理化思想的诞生。

（3）封闭的演绎体系

《原本》注重知识内在逻辑关系，采用演绎体系的体例，即以一些原始概念和不证明的公设和公理为基础，运用逻辑法则，把几何学中所有定理演绎出来。因为在《原本》中，除了推导时所需要的逻辑规则外，每个定理的证明所采用的论据均是公设、公理或前面已经证明过的定理，并且引入的概念（除原始概念）也基本上是符合逻辑上对概念下定义的要求，原则上不再依赖其它东西。因此《原本》是一个封闭的演绎体系。《原本》他从古代的量地术和关于几何形体的原始直观中，用抽象分析方法提炼出一系列基本概念和公理．然后由此出发，运用演绎方法将当时所知的全部几何学知识推演出来，整理成为条理化和系统化的演绎体系。

另外，《原本》的理论体系回避任何与社会生产现实生活有关的应用问题，因此对于社会生活的各个领域来说，它也是封闭的。所以，《原本》是一个封闭的演绎体系。

四、阿波罗尼奥斯和《圆锥曲线论》

阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，约公元前 262—约前 190），是与欧几里得、阿基米德同一时期的伟大数学家．年轻时曾到亚历山大里亚就学，受教于欧几里得的弟子，后来从事教学工作。阿波罗尼奥斯的主要贡献是在前人工作的基础上发展了圆锥曲线理论。门奈赫莫(Menaechmus，约公元前 375---前 325)是系统研究圆锥曲线的第一个人，他在通过解决三大几何难题之一“倍立方”问题中，他知道 $a:x=x:y=y:2a$ 与 $x^2=ay$ 和 $2a^2=xy$ 相当，由此导致对圆锥曲线的探讨。在公元前 300 年左右，欧几里得曾写过关于圆锥曲线的教科书，即《圆锥曲线原本，现已失传。后来阿基米德曾引用一些零散的命题。阿波罗尼奥斯的经典巨著《圆锥曲线论》(Conic Sections)把前辈所得到的圆锥曲线知识，予以严格的系统化，可以说是代表了希腊几何的最高水平。

《圆锥曲线论》八大卷，现存前四卷希腊文本和其次三卷的阿拉伯文本，这是一部内容广泛的著作，其中对许多复杂命题叙述奇特，读起来是相当吃力的。书中首先证明了三种圆锥曲线都可以由同一圆锥体截取而得，改变了过去要用三种不同的锥体截取的方法，继而给出抛物线、椭圆、双曲线，正交弦等名称，取代了过去的直角圆锥曲线、钝角圆锥曲线和锐角圆锥曲线的叫法。和阿基米德比较，阿波罗尼奥斯注意图形的几何性质，而后者侧重数值计算，使之成为积分的先驱。《圆锥曲线论》将圆锥曲线的性质网罗殆尽，几乎使后人无插足的余地。 直到 17 世纪的帕斯卡和笛卡儿，圆锥曲线的理论才有所突破。

阿波罗尼奥斯的其他著作有《截取线段成比例》、《截取面积等于已知面积》、《论切触》、《平面轨迹》、《倾斜》、《十二面积和二十面体对比》等，他还在天文学中有建树，证明了求行星留点的方法，将几何学应用于天文研究。

五、测量大师 —— 海伦

数学家海伦 (Heron of Alexandria，约 1 世纪) 生于埃及亚历山大里亚，生平不详，是古希腊数学家、力学家、机械学家和测量家。约公元 62 年活跃于罗马帝国的著名学术研究城市亚历山大里亚。主要从事教授数学、物理学等学科的教学与研究，他的工作奠定了工程学和土地测量学的基础。海伦十分着重数学的实际应用，他学识渊博、爱好广泛，代表性的著作有《度量论》、《几何》、《体积求法》等 14 本保存到现在。其中《度量论》是其最主要的

贡献，也是希腊最重要的几何学著作。他提出的是理论与方法被采用了数百年之久，影响深远。除此之外，他曾替欧几里得 (Euclid，约公元前 330─公元前 275)的《几何原本》作注释及补充。

海伦以解决几何测量问题而闻名。他给出了很多平面图形的面积公式和立体的体积计算公式，例如：正三边形至正十二边形的面积计算方法。在《度量论》中，他更给出著名的三角形的面积公式——海伦公式。

在本书中还有一个有趣的求近似值的“海伦方法”：求非完全平方的整数平方根近似值。即如果 p=ab, 则 $\sqrt{p}$ 的近似值可由（a+b）/2 给出。此方法允许逐步近似，其近似程度随着 a 与 b 的接近而改进。例如，如果 a1 是 $\sqrt{p}$ 的最初近似值，

则 $a_2 = \dfrac{a_1 + \dfrac{p}{a_1}}{2}$ 是较好的近似值；同样

$a_3 = \dfrac{a_2 + \dfrac{p}{a_2}}{2}$，……是更好的近似值。这实际上是现代计算机常用的一种计算程序。

此外，海伦还把他的理论应用于机械设计，并着有《机械学》、《投石炮》、《枪炮设计》等著作，同时他亦是水钟、测量仪、起重机等的设计者。可见他是一位把数学应用于生活的天才。

六、古希腊天文、地理、地图、数学家——托勒密

托勒密（Claudius Ptolemaeus，约 90-168），古希腊天文、地理、地图、数学家。生于埃及的亚历山大里亚。公元 127 年，年轻的托勒密被送到亚历山大里亚去求学。在那里，他阅读了不少的书籍，并且学会了天文测量和大地测量。他曾长期住在亚历山大里亚城，直到 151 年。

在天文学方面，托勒密于公元 127 年到 151 年，在亚历山大里亚进行了长期的、大量的天文观测，托勒密把这些天文观测成果和地心体系总结成 13 卷巨著《大综合论》(后来阿拉伯文译本改名为《天文学大成》)，并提出了自己的宇宙结构学说，即“地心说”，该书是希腊天文学的权威著作，也是哥白尼和开普勒之前最有影响的著作。托勒密主张地球处于宇宙中心，且静止不动，日、月、行星和恒星均环绕地球运行。托勒密的体系由于较好地容纳了望远镜发现之前的天文观测，这个不反映宇宙实际结构的数学图景，却较为完满的解释了当时观测到的行星运动情况，并取得了航海上的实用价值，从而被人们广为信奉。他的地心说长期统治着西方天文学界，直到 16 世纪哥白尼的日心说体系确立为止。

在数学方面，托勒密是一位有成就的数学家。他用圆周运动组合解释了天体视动，这在当时被认为绝对准确。他在《大综合论》中证明了许多与天文学计算有关的球面三角定理，其中，他论证了四边形的特性，即著名的托勒密定理。根据这一定理，托勒密推出了正弦、余弦的和差公式及一系列的三角恒等式。

托勒密找到一个含义丰富的几何命题推导弦表的方法，他把圆周分为 360 等份，把直径分为 120 等份，

然后他提出：已知一弧为 360 份中的若干份，求相应的弦长(用直径所含 120 份中的份数来表示)。在一切计算中，用的是 60 进制。托勒密研究主要是球面三角，但是他制定的弦表在实际上奠定了平面三角学的基础。托勒密定半径为 60 个单位，后来印度人、阿拉伯及纳皮尔等都实际上是将三角函数作为在固定半径的圆内各函数线的长。一直到欧拉，才确定半径为 1，开始把三角函数定义为线段的比值。

在地理学方面，托勒密著有 8 卷的《地理学》巨著，书中最早提出了类似于现代经、纬度的概念。主张把地理学和天文学联系起来，以从各地测得的经纬度为依据绘制地图。在他的《地理学》中，有 6 卷就是包括 8000 多个地点并有经纬度的世界地图，包括、欧、亚、非三大洲和太平洋、印度洋、大西洋三大洋的早期世界地图。他已经知道马来半岛和中国，他还计算出了几千个地点的地理位置。

另外，据说他还写过《光学》一书，认为光线在折射时入射角与折射角成正比关系。但他的最大成就则是在天文学研究方面。

七、最早的女数学家——海帕西娅

长久以来，女性数学家在数学领域总是居于少数，一般大众琅琅上口的大数学家也几乎清一色都是男性。但您或许不知道，早在公元前四、五世纪，在亚历山卓希腊时期就出现了一位杰出的女数学家——海帕西娅（Hypatia,约 370---415 年），这是目前历史考证所能确定的第一位女数学家。

公元 4 世纪，罗马帝国的统治濒于崩溃边缘，智力与精神在反动教会的禁锢下也都处于全面的败坏之中。当时只有极少数希腊人还竭其所能的保留着古希腊文明的遗产，美丽而有博学多才的女数学家和天文学家海帕西娅便是其中之一。海帕西娅诞生于亚历山大里亚，父亲是个数学家。在父亲的熏陶之下，海帕西娅从小就显示出了非凡的数学才华，据说她在 10 岁时就知道应用相似三角形对应边成比例的性质去测量金字塔的高度. 海帕西娅在数学上的造诣很高，对自然哲学也有兴趣。海帕西娅熟读了当时几乎所有大数学家的著作，如欧几里得的《原本》，阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线》，丢番图的《算术》等，并注释了不少柏拉图、亚里士多德和他许多古希腊哲学家的著作，她还自己写书，写了不少有关数学和天文学的论文，阐明了古希腊大数学家阿波罗尼奥斯得圆锥曲线理论，还发明了星盘。可惜的是她的全部著作都已经失传。

海帕西娅曾在亚历山大里亚学院教授数学和哲学，听她讲课的学生来自欧洲、亚洲和非洲. 她笃信理性是真知的唯一源泉，因而被基督教首领视为异端邪说. 在基督教主教西里尔(Cyril)策划下，一场蓄谋已久的惨案终于发生了。公元 415 年 3 月的一天，正当海帕西娅坐着马车去学院讲课的途中，一群宗教狂徒跟踪而至，突然把她拉下马车，拖到附近一座教堂里，用极其残忍的手段将她杀害了。